

XVI Śląski Konkurs Matematyczny
Szkice rozwiązań zadań — zawody finałowe 2019

Zadanie 1.

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = y^2 + 1 \\ y + \frac{1}{y} = x^2 + 1. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Liczby x i $\frac{1}{x}$ są tego samego znaku. A ponieważ $x + \frac{1}{x} = y^2 + 1 > 0$, więc mamy $x > 0$.

Analogicznie $y > 0$. Ze znanej nierówności $x + \frac{1}{x} \geq 2$ dla liczb dodatnich x uzyskujemy $y^2 + 1 \geq 2$, a stąd $y^2 \geq 1$, czyli $y \geq 1$. Analogicznie $x \geq 1$.

Odejmując stronami równania danego układu, dostajemy kolejno

$$\begin{aligned} x - y + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} &= y^2 - x^2 \\ (x - y) - \frac{x - y}{xy} + (x - y)(x + y) &= 0 \\ (x - y) \left[1 - \frac{1}{xy} + x + y \right] &= 0. \end{aligned}$$

Stąd (*) $x = y$ lub (**) $1 + x + y = \frac{1}{xy}$. Ponieważ $x \geq 1$ oraz $y \geq 1$, więc $1 + x + y \geq 3$ i jednocześnie $xy \geq 1$, czyli $\frac{1}{xy} \leq 1$. Zatem warunek (**) zachodzić nie może.

Jeśli $x = y$, to każde równanie danego w zadaniu układu możemy kolejno zapisać:

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &= x^2 + 1 \\ x^3 - x^2 + x - 1 &= 0 \\ (x - 1)(x^2 + 1) &= 0, \end{aligned}$$

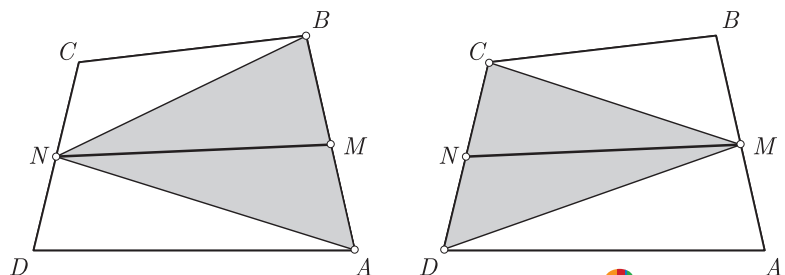
skąd $x = 1$. Zatem **układ może mieć tylko jedno rozwiązanie** $(x, y) = (1, 1)$. Bezpośrednim podstawieniem sprawdzamy, że para ta istotnie spełnia dany układ równań (sprawdzenie jest konieczne, bo odejmowanie równań stronami nie jest przekształceniem równoważnym).

Zadanie 2.

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym punkty M i N są środkami boków odpowiednio AB i CD . Pola trójkątów ABN i CDM są równe. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

Pole wielokąta $ABCD \dots$ oznaczać będziemy $[ABCD \dots]$. Przyjmijmy, że

$$[ABN] = [CDM] = S.$$



Ponieważ $AM = BM$, a trójkąty AMN i BMN mają wspólną wysokość poprowadzoną do podstaw AM i BM , więc ich pola są równe, czyli

$$[AMN] = [BMN] = \frac{1}{2}S.$$

Analogicznie, z równości odcinków CN i DN otrzymujemy równość

$$[CMN] = [DMN] = \frac{1}{2}S.$$

Z równości pól trójkątów AMN i DMN (o wspólnej podstawie MN) otrzymujemy, że ich wysokości poprowadzone z wierzchołków odpowiednio A i D są równe, skąd dostajemy, że $AD \parallel MN$.

W taki sam sposób uzyskujemy, że $BC \parallel MN$. Zatem $AD \parallel BC$ co oznacza, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

Zadanie 3.

Znajdź wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba $19p + 1$ jest sześcianem pewnej liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Niech liczba całkowita m spełnia równanie $19p + 1 = m^3$. Ponieważ $p \geq 2$, więc $m^3 = 19p + 1 \geq 39$, czyli $m \geq 4$. Stąd

$$\begin{aligned} 19p &= m^3 - 1 \\ 19p &= (m - 1)(m^2 + m + 1). \end{aligned}$$

Ponieważ liczby 19 i p są liczbami pierwszymi, więc może zachodzić jedna z poniższych równości:

$$\begin{aligned} 1^\circ \begin{cases} m - 1 = p \\ m^2 + m + 1 = 19 \end{cases} \quad \text{lub} \quad 2^\circ \begin{cases} m - 1 = 19 \\ m^2 + m + 1 = p, \end{cases} \quad \text{lub} \quad 3^\circ \begin{cases} m - 1 = 1 \\ m^2 + m + 1 = 19p, \end{cases} \\ 4^\circ \begin{cases} m - 1 = 19p \\ m^2 + m + 1 = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

1° Rozwiązaniami równania $m^2 + m - 18 = 0$ są liczby

$$m_1 = \frac{-1 - \sqrt{73}}{2} \quad \text{i} \quad m_2 = \frac{-1 + \sqrt{73}}{2},$$

które nie są liczbami całkowitymi, więc przypadek 1° nie może zachodzić.

Uwaga. Można inaczej wykazać, że równanie $m^2 + m - 18 = 0$, czyli $m(m + 1) = 18$ nie ma rozwiązań całkowitych.

Ponieważ $3 \cdot 4 = 12$ i $4 \cdot 5 = 20$ oraz $-4 \cdot (-3) = 12$ i $-5 \cdot (-4) = 20$, więc nie istnieje liczba całkowita m spełniająca równanie $m(m + 1) = 18$.

2° W tym przypadku otrzymujemy $m = 20$ i wtedy $p = 20^2 + 20 + 1 = 421$. Ponieważ (co łatwo sprawdzić bezpośrednio) liczba 421 nie dzieli się przez żadną liczbę pierwszą mniejszą od $\sqrt{421} < 21$, czyli przez: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, więc jest to liczba pierwsza. Zatem w tym przypadku istnieje jedna liczba pierwsza $p = 421$ spełniająca warunki zadania i wtedy $19 \cdot 421 + 1 = 8000 = 20^3$.

3° Jeśli $m - 1 = 1$, to $m = 2$ i liczba ta nie spełnia warunków zadania.

4° Rozwiązaniami równania $m^2 + m + 1 = 1$ są liczby $m_1 = 0$, $m_2 = -1$, które nie spełniają warunków zadania.

Ostatecznie, istnieje dokładnie jedna liczba pierwsza p (wyznaczona w 2°) spełniająca warunki zadania.



Zadanie 4.

Liczby całkowite a, b, c spełniają równanie $a^2 + b^2 = c^2 + 1919^2$. Wykaż, że liczba $a + b + c$ jest liczbą nieparzystą.

Rozwiązanie

Sposób 1.

Będziemy badać parzystość lewej i prawej strony równania $a^2 + b^2 = c^2 + 1919^2$.

1° Liczba c jest liczbą nieparzystą.

Zauważmy, że kwadrat liczby nieparzystej też jest liczbą nieparzystą. Zatem liczba $c^2 + 1919^2$ jest liczbą parzystą. Wtedy lewa strona danego równania jest liczbą parzystą, skąd wnioskujemy, że liczby a i b muszą być tej samej parzystości (obie parzyste lub obie nieparzyste). Stąd suma $a + b$ jest liczbą parzystą i w konsekwencji suma $a + b + c$ jest liczbą nieparzystą.

2° Liczba c jest liczbą parzystą.

Ponieważ kwadrat liczby parzystej jest liczbą parzystą, więc liczba $c^2 + 1919^2$ jest liczbą nieparzystą. Zatem i lewa strona równania jest liczbą nieparzystą, stąd liczby a i b są różnej parzystości, czyli suma $a + b$ jest liczbą nieparzystą i ostatecznie suma $a + b + c$ jest liczbą nieparzystą.

Sposób 2.

Równość $a^2 + b^2 = c^2 + 1919^2$ zapiszemy w postaci równoważnej

$$a^2 + b^2 = c^2 + 1919^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab + 1919^2$$

$$(a + b)^2 - c^2 = 2ab + 1919^2$$

$$(a + b + c)(a + b - c) = 2ab + 1919^2.$$

Zauważmy, że prawa strona ostatniej równości jest liczbą nieparzystą, skąd lewa strona jest iloczynem liczb nieparzystych, a zatem liczba $a + b + c$ jest liczbą nieparzystą.

Sposób 3.

Jeśli a jest liczbą całkowitą, to $a(a - 1) = a^2 - a$ jako iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych dzieli się przez 2. Stąd $a^2 \equiv a \pmod{2}$. Z tej zależności i równości $a^2 + b^2 = c^2 + 1919^2$ mamy

$$a + b \equiv c + 1 \pmod{2} \quad \text{czyli} \quad a + b + c \equiv 2c + 1 \pmod{2}$$

co dowodzi tezy zadania.

Sposób 4.

Z równości $a^2 + b^2 = c^2 + 1919^2$ uzyskujemy $a^2 + b^2 + c^2 = 2c^2 + 1919^2$, czyli $a^2 + b^2 + c^2$ jest liczbą nieparzystą. Przypuśćmy, że $a + b + c$ jest liczbą parzystą, czyli $a + b + c = 2k$ dla pewnej liczby całkowitej k . Wtedy

$$(a + b + c)^2 = 4k^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 4k^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(2k^2 - ab - bc - ca),$$

skąd wynika, że $a^2 + b^2 + c^2$ jest liczbą parzystą. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że liczba $a + b + c$ jest liczbą nieparzystą.

Można postawić pytanie, czy istnieją trójki (a, b, c) liczb całkowitych spełniające dane w zadaniu równanie. Okazuje się, że takich trójek jest nieskończenie wiele. Wystarczy wziąć trójki $(a, 1919, a)$. Istnieją też trójki, w których wszystkie liczby są parami różne i różne od 1919, np. $(741, 1807, 363)$, $(1096, 1737, 732)$.

Zadanie 5.

Udowodnij nierówność

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{2019^2} < 1.$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że dla $n > 1$ prawdziwy jest związek $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n \cdot n} < \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. Stąd

$$\frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2018^2} < \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018},$$

$$\frac{1}{2019^2} < \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019}.$$

Dodając stronami otrzymane nierówności, dostajemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{2018^2} + \frac{1}{2019^2} &< \\ &< \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2017} - \frac{1}{2018}\right) + \left(\frac{1}{2018} - \frac{1}{2019}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{2019} < 1. \end{aligned}$$

Jako ciekawostkę podamy następujący mniej znany fakt:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{2019^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,6449341,$$

z którego wynika teza naszego zadania.

(tsz)