XIV Śląski Konkurs Matematyczny

Szkice rozwiązań zadań — zawody finałowe 2017

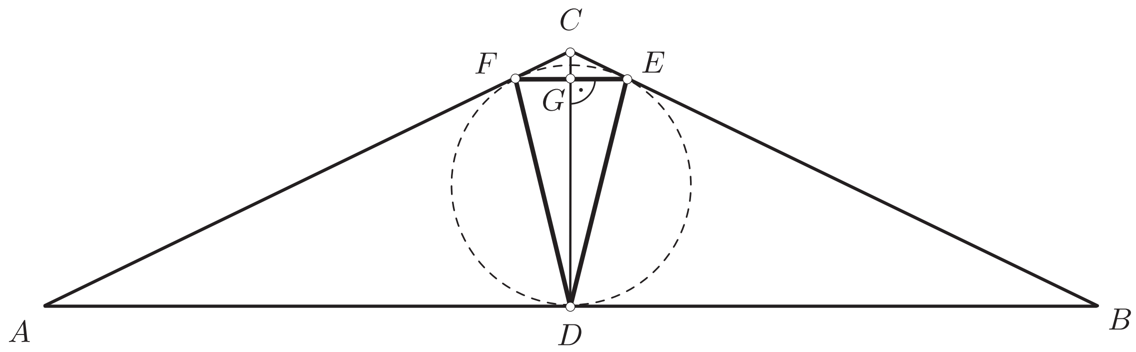
Zadanie 1.

Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB=90$ i $AC=BC=50$. Punkty D, E, F są punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z jego bokami. Oblicz obwód trójkąta DEF.

Rozwiązanie

Sposób 1.

Niech punkty D, E, F będą punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z jego bokami odpowiednio AB, BC, AC (zobacz rysunek poniżej).



Ponieważ trójkąt ABC jest równoramienny, więc również trójkąt FEC jest równoramienny, $FE \parallel AB$ oraz punkt D jest środkiem odcinka AB.
Z twierdzenia o stycznych do okręgu mamy $BE=BD=45$, skąd $CE=5$. Stosując do trójkąta BCD twierdzenie Pitagorasa, dostajemy

$$CD=\sqrt{BC^2-BD^2}=\sqrt{50^2-45^2}=\sqrt{475}=5\sqrt{19}.$$

Z równoległości odcinków FE i AB wynika podobieństwo trójkątów FEC i ABC. Zatem

$$\frac{FE}{CE}=\frac{AB}{CB} \quad \text{oraz} \quad \frac{CG}{CE}=\frac{CD}{CB},$$

skąd

$$FE=\frac{AB\cdot CE}{CB}=9 \quad \text{oraz} \quad CG=\frac{CD\cdot CE}{CB}=\frac{\sqrt{19}}{2}.$$

Również trójkąt DEG jest prostokątny, więc

$$DE=\sqrt{DG^2+GE^2}=\sqrt{(CD-CG)^2+\left(\frac{FE}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{9}{2}\sqrt{19}\right)^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2}=9\sqrt{5}=DF.$$

Ostatecznie, obwód trójkąta DEF jest równy:

$$\text{obw.}\,\Delta DEF=DE+EF+DF=9\left(1+2\sqrt{5}\right).$$

Sposób 2.

Zauważmy, że trójkąty DAF, DBE i EFD są równoramienne — zobacz rysunek wykorzystany w sposobie 1. Przyjmując $\sphericalangle DAF=\sphericalangle DBE=\alpha$, otrzymujemy

$$\sphericalangle EDF=180^\circ-(\sphericalangle ADF+\sphericalangle BDE)=180^\circ-\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}+90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\alpha.$$

Wynika stąd, że trójkąty DAF i EDF mają takie same kąty, więc są trójkątami podobnymi, skąd

$$\frac{DF}{AD}=\frac{EF}{DF}.$$

Wykorzystując teraz $EF=9$ (wynik uzyskany w sposobie 1), dostajemy

$$DF^2 = AD \cdot EF = 45 \cdot 9,$$

a stąd $DF = 9\sqrt{5}$. Zatem obwód trójkąta DEF jest równy:

$$\text{obw.}\, \Delta DEF = DE + EF + DF = 9\left(1+2\sqrt{5}\right).$$

Zadanie 2.
Wyznacz najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą n, dla której istnieją takie liczby rzeczywiste a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_n, należące do przedziału $(-1;1)$, że spełniona jest równość

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n| = 2017 + |a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n|.$$

Rozwiązanie

Jeśli liczba x należy do przedziału $(-1;1)$, to $|x|<1$. Zatem

$$n > |a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n| = 2017 + |a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n| \geqslant 2017.$$

Jak widać, najmniejszą możliwą wartością n spełniającą warunki zadania może być $n=2018$. Należy jeszcze wykazać, że dla $n=2018$ takie liczby istnieją.
Zauważmy, że liczby

$$a_i = \begin{cases} \dfrac{2017}{2018} & \text{dla } i = 1, 3, 5, \ldots, 2017 \\ -\dfrac{2017}{2018} & \text{dla } i = 2, 4, 6, \ldots, 2018 \end{cases}$$

spełniają podaną w zadaniu równość. Stąd najmniejszą dodatnią liczbą całkowitą spełniającą warunki zadania jest $n=2018$.

Zadanie 3. Wykaż, że spośród dowolnych siedmiu liczb całkowitych zawsze można wybrać takie cztery liczby, których suma jest podzielna przez 4.

Rozwiązanie

Zauważmy na początku, że suma dwóch liczb całkowitych tej samej parzystości jest liczbą parzystą oraz że liczba parzysta przy dzieleniu przez 4 daje resztę 0 lub 2.

Wśród siedmiu liczb całkowitych co najmniej cztery są tej samej parzystości. Wybieramy dwie spośród nich i ich sumę oznaczamy s_1. Na podstawie uwagi podanej na początku liczba s_1 jest liczbą parzystą i przy dzieleniu przez 4 daje resztę 0 lub 2.

Wśród pozostałych pięciu liczb co najmniej trzy są tej samej parzystości. Wybieramy z nich dwie i ich sumę oznaczamy s_2. Jak poprzednio, liczba s_2 przy dzieleniu przez 4 daje resztę 0 lub 2.

Pozostały trzy liczby. Wśród nich na pewno dwie są tej samej parzystości. Wybieramy je i ich sumę oznaczamy s_3, która przy dzieleniu przez 4 daje resztę 0 lub 2.

Wśród liczb s_1, s_2, s_3 co najmniej dwie dają tę samą resztę przy dzieleniu przez 4 (0 lub 2). Suma tych dwóch liczb, które przy dzieleniu przez 4 dają tę samą resztę, jest na pewno podzielna przez 4, więc spośród siedmiu liczb całkowitych zawsze można wybrać takie cztery, których suma jest podzielna przez 4.

Zadanie 4.

Dana jest taka liczba naturalna $n>1$, dla której liczba $2^{2^n-1}-1$ jest liczbą pierwszą. Wykaż, że również liczba n jest liczbą pierwszą.

Rozwiązanie

Wykażemy na początku, że jeśli liczba naturalna n jest liczbą złożoną, to liczba 2^n-1 też jest liczbą złożoną.

Załóżmy, że liczba naturalna n jest liczbą złożoną. Istnieją więc takie liczby naturalne p i q większe od 1, że $n=p\cdot q$. Wtedy

$$2^n-1=2^{p\cdot q}-1=(2^p)^q-1=(2^p-1)\left((2^p)^{q-1}+(2^p)^{q-2}+\cdots+2^p+1\right),$$

a ponieważ liczby naturalne p i q są większe od 1, więc każdy z czynników po prawej stronie otrzymanej równości jest liczbą naturalną większą od 1, czyli liczba ta jest liczbą złożoną. Zatem, jeśli liczba naturalna n jest liczbą złożoną, to również liczba 2^n-1 jest liczbą złożoną i w konsekwencji liczba $2^{2^n-1}-1$ byłaby liczbą złożoną, co jest sprzeczne z założeniem. Kończy to rozwiązanie zadania.

Zadanie 5.

Dany jest taki sześciokąt $ABCDEF$, w którym spełnione są zależności:

$$AB\parallel DE,\quad BC\parallel EF,\quad CD\parallel FA\quad \text{oraz}\quad AD=BE=CF.$$

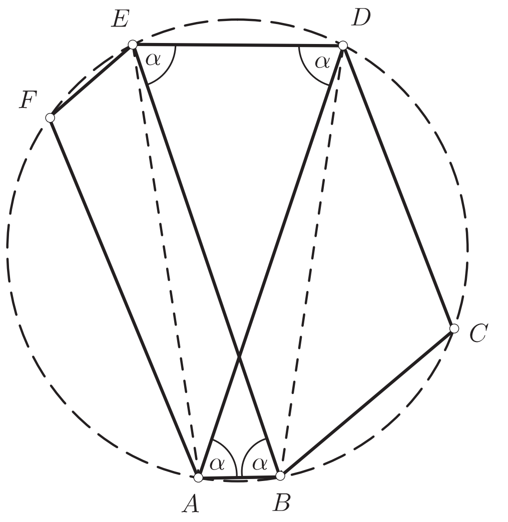
Wykaż, że na tym sześciokącie można opisać okrąg.

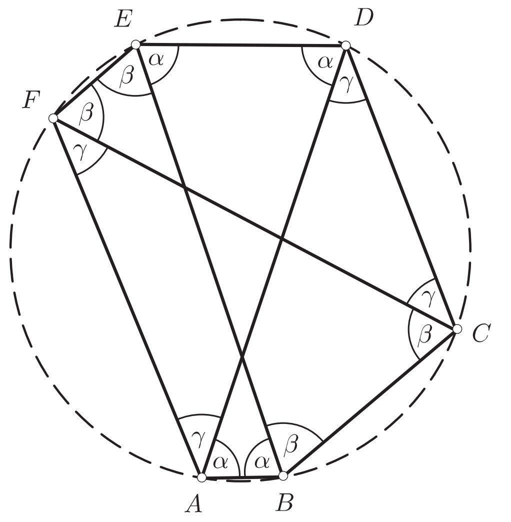
Rozwiązanie

Z warunku $AB\parallel DE$ wynika, że czworokąt $ABDE$ jest trapezem. Ponieważ $AD=BE$, więc jest to trapez równoramienny. Stąd (rysunek po lewej):

$$\sphericalangle ABE=\sphericalangle BAD=\sphericalangle ADE=\sphericalangle BED=\alpha.$$

Jak wiadomo na trapezie równoramiennym można opisać okrąg. Opiszmy zatem na trapezie $ABDE$ okrąg. Jest to jednocześnie okrąg opisany na trójkącie ABD.





Również czworokąty $BCEF$ i $CDFA$ są trapezami równoramiennymi (rysunek po prawej), czyli:

$$\sphericalangle BCF=\sphericalangle CBE=\sphericalangle EFC=\sphericalangle FEB=\beta\quad \text{oraz}\quad \sphericalangle AFC=\sphericalangle CDA=\sphericalangle DAF=\sphericalangle DCF=\gamma.$$

Suma kątów sześciokąta jest równa $720°$, więc

$$4\alpha + 4\beta + 4\gamma = 720°,$$

skąd

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Zauważmy, że

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = \alpha + \beta + \gamma = 180°,$$

zatem na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg, który jest również okręgiem opisanym na trójkącie ABD, więc punkty A, B, C, D i E leżą na jednym okręgu. Jest to jednocześnie okrąg opisany na trójkącie ADE. Powtarzając powyższe rozumowanie dla czworokąta $ADEF$ stwierdzamy, że również punkt F leży na okręgu opisanym na trójkącie ADE, czyli wszystkie wierzchołki tego sześciokąta leżą na jednym okręgu.

(tsz)