XIII Śląski Konkurs Matematyczny
Szkice rozwiązań zadań — zawody finałowe 2016

Zadanie 1.

Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, które dla każdej liczby rzeczywistej x spełniają równanie

$$xf(x)+f(1-x)=2.$$

Rozwiązanie

Załóżmy, że taka funkcja istnieje. Wstawiając do danego równania $1-x$ w miejsce x, otrzymujemy

$$(1-x)f(1-x)+f(x)=2. \tag{1}$$

Z równania danego w zadaniu mamy $f(1-x)=2-xf(x)$. Łącząc to z równaniem (1), uzyskujemy równanie

$$(1-x)\,(2-xf(x))+f(x)=2,$$

skąd po przekształceniach

$$f(x)=\frac{2x}{x^2-x+1}. \tag{2}$$

Ponieważ $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$, więc dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R}$ liczb rzeczywistych. Jeśli więc taka funkcja istnieje, to może być tylko określona wzorem (2). Sprawdzimy, że tak jest istotnie

$$x\cdot\frac{2x}{x^2-x+1}+\frac{2(1-x)}{(1-x)^2-(1-x)+1}=\frac{2x^2-2x+2}{x^2-x+1}=2.$$

Zatem dane w zadaniu równanie spełnia tylko funkcja $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-x+1}$.

Zadanie 2.

Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) liczb całkowitych, spełniające układ równań

$$\begin{cases} abc+ac+a+20=0 \\ abc+bc+b+18=0. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Odejmując równania stronami, otrzymujemy

$$bc-ac+b-a-2=0,$$

co po przekształceniach możemy zapisać w postaci

$$(b-a)(c+1)=2.$$

Liczbę 2 można przedstawić w postaci iloczynu dwóch liczb całkowitych na cztery sposoby

$$2=1\cdot 2=2\cdot 1=-1\cdot(-2)=-2\cdot(-1).$$

Otrzymujemy stąd alternatywę czterech układów równań

$$1^\circ \begin{cases} b-a=1 \\ c+1=2 \end{cases} \quad \text{lub} \quad 2^\circ \begin{cases} b-a=2 \\ c+1=1, \end{cases} \quad \text{lub} \quad 3^\circ \begin{cases} b-a=-1 \\ c+1=-2, \end{cases} \quad \text{lub} \quad 4^\circ \begin{cases} b-a=-2 \\ c+1=-1. \end{cases}$$

Weźmy pod uwagę pierwszy z tych układów. Z pierwszego równania mamy $b=a+1$, a z drugiego $c=1$. Wstawiając te zależności do równania pierwszego w układzie danym w treści zadania, dostajemy

$$a(a+1)+a+a+20=0$$
$$a^2+3a+20=0.$$

Równanie to nie ma rozwiązania, więc przypadek 1° zachodzić nie może.

Rozpatrzmy przypadek 2°. Wtedy $b=a+2$ oraz $c=0$. Stąd $a+20=0$, czyli $a=-20$, $b=-18$. Otrzymaliśmy trójkę $(a,b,c)=(-20,-18,0)$ i jak łatwo sprawdzić spełnia ona dany w zadaniu układ równań.

W przypadku 3° mamy $b=a-1$ i $c=-3$, a stąd

$$-3a^2+a+20=0.$$

Równanie to nie ma rozwiązań całkowitych, więc ten przypadek też nie może zachodzić.

Pozostał do rozpatrzenia przypadek 4°. Wtedy $b=a-2$ oraz $c=-2$. Stosując takie same przekształcenia jak w przypadkach poprzednich, otrzymujemy

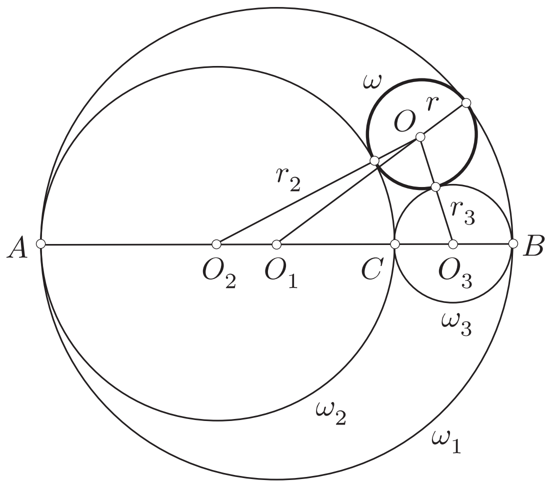
$$-2a^2+3a+20=0.$$

Rozwiązaniami tego równania są liczby $a_1=-\frac{5}{2}$, która nie jest liczbą całkowitą oraz $a_2=4$. Stąd $b=2$. Zatem otrzymujemy trójkę $(a,b,c)=(4,2,-2)$. Bezpośrednim podstawieniem sprawdzamy, że trójka ta spełnia dany w zadaniu układ. Ostatecznie zadanie ma dwa rozwiązania: $(a,b,c)=(-20,-18,0)$ oraz $(a,b,c)=(4,2,-2)$.

Zadanie 3. Dany jest odcinek AB o długości 8. Na odcinku tym wybrano taki punkt C, że $AC=3BC$. Odcinki AB, AC i BC są średnicami okręgów odpowiednio ω_1, ω_2 i ω_3. Okrąg ω jest styczny zewnętrznie do okręgów ω_2 i ω_3 oraz styczny wewnętrznie do okręgu ω_1. Oblicz promień okręgu ω.

Rozwiązanie

Sposób 1.



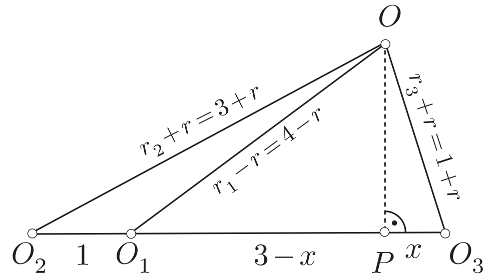
Ponieważ $AB=8$ oraz $AC=3BC$, więc $AC=6$ i $BC=2$. Stąd promienie okręgów ω_2 i ω_3 są równe odpowiednio $r_2=3$ i $r_3=1$. Promień okręgu ω_1 jest równy $r_1=4$. Środki okręgów ω_1, ω_2, ω_3 i ω oznaczmy odpowiednio O_1, O_2, O_3 i O.

Z warunków styczności poszczególnych okręgów otrzymujemy

$$O_1O=r_1-r=4-r,\quad O_2O=r_2+r=3+r,$$
$$O_3O=r_3+r=1+r.$$

Ponadto

$$O_1O_2=1,\quad O_1O_3=3,\quad O_2O_3=4.$$



Rozpatrzmy teraz trójkąt O_2O_3O. Niech punkt P będzie rzutem prostokątnym punktu O na prostą O_2O_3. Przyjmując $PO_3=x$, dostajemy

$$O_1P=3-x,\quad O_2P=4-x.$$

Trójkąty O_2OP i O_1OP są prostokątne, więc prawdziwe są równości

$$O_2O^2-O_2P^2=OP^2=O_1O^2-O_1P^2,$$

czyli

$$(3+r)^2-(4-x)^2=(4-r)^2-(3-x)^2,$$

a stąd po prostych przekształceniach $x=7-7r$. Rozpatrując trójkąty prostokątne O_3OP i O_1OP, dostajemy

$$O_3O^2-O_3P^2=OP^2=O_1O^2-O_1P^2,$$

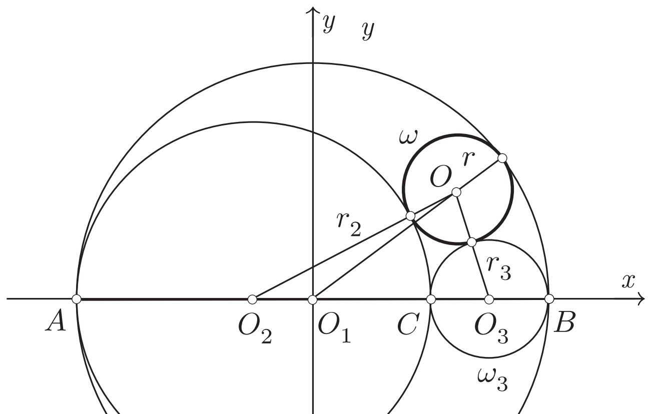
czyli

$$(1+r)^2-x^2=(4-r)^2-(3-x)^2.$$

Wykorzystując teraz zależność $x=7-7r$, po prostych przekształceniach otrzymujemy $r=\dfrac{12}{13}$.

Uwaga. W rozwiązaniu zadania można też wykorzystać twierdzenie kosinusów zastosowane do trójkątów O_1O_3O i O_2O_3O.

Sposób 2.



Umieśćmy dane okręgi w układzie współrzędnych tak, aby środki okręgów ω_1, ω_2 i ω_3 leżały na osi x i środek okręgu ω_1 był początkiem układu współrzędnych (zobacz rysunek po prawej).

Przyjmijmy: $O_1=(0,0)$, $O_2=(-1,0)$, $O_3= =(3,0)$ oraz $O=(a,b)$. Promienie okręgów ω_1, ω_2, ω_3 i ω są odpowiednio równe $r_1=4$, $r_2=3$, $r_3=1$ i r.

Zatem

$$\begin{cases} a^2+b^2=(4-r)^2 \\ (a+1)^2+b^2=(3+r)^2 \\ (a-3)^2+b^2=(1+r)^2. \end{cases}$$

Odejmując stronami równanie pierwsze od równania drugiego, otrzymujemy

$$(a+1)^2+b^2-(a^2+b^2)=(3+r)^2-(4-r)^2,$$

skąd $2a=14r-8$.

Jeśli odejmiemy stronami równanie trzecie od równania drugiego, to dostaniemy

$$(a+1)^2+b^2-((a-3)^2+b^2)=(3+r)^2-(1+r)^2,$$

a stąd $2a=r+4$.

Z równania $14r-8=r+4$ otrzymujemy $r=\dfrac{12}{13}$.

Zadanie 4.

Wykaż, że jeśli a, b, c są długościami boków trójkąta, to prawdziwa jest nierówność

$$1+\left(1-\frac{a+b}{c}\right)\left(1-\frac{b+c}{a}\right)\left(1-\frac{c+a}{b}\right)\geqslant 0.$$

Rozwiązanie

Jeśli a, b, c są długościami boków trójkąta, to spełnione są nierówności

(1) $$a+b>c>0, \qquad b+c>a>0, \qquad c+a>b>0.$$

Ponieważ liczby a, b, c są dodatnie, więc daną nierówność możemy zapisać w postaci równoważnej

$$abc+(c-(a+b))(a-(b+c))(b-(c+a))\geqslant 0,$$

a tę z kolei następująco

(2) $$abc\geqslant (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

Z nierówności (1) wynika, że wyrażenia w nawiasach nierówności (2) są dodatnie. Przyjmując

$$\begin{cases} a+b-c=x>0\\ b+c-a=y>0\\ c+a-b=z>0\end{cases}$$

i wyznaczając z tego układu a, b, c, otrzymujemy

$$a=\frac{x+z}{2}, \qquad b=\frac{x+y}{2}, \qquad c=\frac{y+z}{2}.$$

Nierówność (2) przyjmuje więc postać

$$\frac{x+z}{2}\cdot\frac{x+y}{2}\cdot\frac{y+z}{2}\geqslant xyz,$$

albo

$$\frac{x+z}{2}\cdot\frac{x+y}{2}\cdot\frac{y+z}{2}\geqslant \sqrt{xz}\cdot\sqrt{xy}\cdot\sqrt{yz}.$$

Uzyskana nierówność jest prawdziwa na podstawie zależności między średnią arytmetyczną i geometryczną dla dwóch liczb dodatnich. Kończy to rozwiązanie zadania.

Zadanie 5.

Na tablicy zapisano liczbę 252. Co minutę liczbę zapisaną na tablicy mnożymy lub dzielimy przez 2 lub przez 3, ale tak, aby wynik był liczbą całkowitą. Po wykonaniu działania wynik zapisywany jest na tablicy, a poprzednio zapisana liczba jest z tablicy ścierana. Rozstrzygnij, czy po upływie dokładnie jednej godziny na tablicy może pojawić się liczba 2016.

Rozwiązanie

Sposób 1.

Rozkładając liczby 252 i 2016 na czynniki pierwsze, otrzymujemy

$$252=2^2\cdot 3^2\cdot 7 \quad \text{oraz} \quad 2016=2^5\cdot 3^2\cdot 7.$$

Weźmy liczbę postaci $2^m\cdot 3^n\cdot 7$, gdzie m, n są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Wykonując pojedynczą operację opisaną w zadaniu, dostaniemy jedną z liczb

$$2^{m+1}\cdot 3^n\cdot 7 \quad \text{lub} \quad 2^m\cdot 3^{n+1}\cdot 7, \quad \text{lub} \quad 2^{m-1}\cdot 3^n\cdot 7, \quad \text{lub} \quad 2^m\cdot 3^{n-1}\cdot 7.$$

Widać, że liczba $m+n$ zwiększyła się o 1 lub zmniejszyła się o 1. Jeśli więc $m+n$ była liczbą parzystą, to po wykonaniu takiej operacji będzie liczbą nieparzystą, a jeśli była liczbą nieparzystą, to przejdzie w liczbę parzystą. Zatem wykonanie jednej operacji zmienia parzystość sumy wykładników czynników 2 oraz 3. Po dwóch takich operacjach parzystość sumy tych wykładników będzie taka sama, jak na początku, czyli wykonanie kolejno dwóch operacji nie zmienia parzystości liczby $m+n$. W ciągu pełnej godziny wykonać należy 60 takich operacji, więc w wyniku takiego działania nie zmieni się parzystość sumy wykładników czynników 2 oraz 3. Ale w rozkładzie danych liczb na czynniki sumy tych wykładników są różnej parzystości, stąd odpowiedź na pytanie postawione w zadaniu jest negatywna.

Sposób 2.

Załóżmy, że udało się to zrobić wykonując k mnożeń przez 2, l dzieleń przez 2, m mnożeń przez 3 i n dzieleń przez 3, gdzie liczby k, l, m i n są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Zatem

$$252 \cdot \frac{2^k \cdot 3^m}{2^l \cdot 3^n} = 2016.$$

Stąd

$$2^{k-l} \cdot 3^{m-n} = 8,$$

czyli

$$3^{m-n} = 2^{3-k+l}.$$

Z ostatniej równości, ponieważ liczby 2 i 3 są różnej parzystości, wnioskujemy, że

$$\begin{cases} m-n=0 \\ 3-k+l=0, \end{cases}$$

skąd

(1) $$m=n \quad \text{i} \quad k=l+3.$$

Zauważmy, że w ciągu jednej godziny musimy wykonać dokładnie 60 takich operacji, więc $k+l+m+n=60$. Uwzględniając (1), otrzymujemy

$$l+3+l+m+m=60,$$

a stąd

$$2(l+m)=57.$$

Uzyskana sprzeczność dowodzi, że wykonując operacje opisane w zadaniu, po upływie dokładnie jednej godziny, z liczby 252 nie otrzymamy liczby 2016.

(*tsz*)