XI Śląski Konkurs Matematyczny

Szkice rozwiązań zadań — zawody finałowe 2014

Zadanie 1.

Wykazać, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, dla której liczba

$$\underbrace{2014\,2014\,2014\ldots 2014\,2014}_{n\text{-krotnie powtórzona liczba } 2014}$$

jest podzielna przez 2013.

Rozwiązanie

Weźmy pod uwagę 2014 liczb

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2014\\
a_2 &= 2014\,2014\\
a_3 &= 2014\,2014\,2014\\
&\vdots\\
a_{2014} &= \underbrace{2014\,2014\,2014\ldots 2014\,2014}_{\text{liczba } 2014 \text{ powtórzona } 2014 \text{ razy}}
\end{aligned}$$

i rozpatrzmy reszty z dzielenia tych liczb przez 2013. Możliwe reszty to liczby ze zbioru

$$\mathcal{R} = \{0, 1, 2, \ldots, 2012\}.$$

Ponieważ mamy 2014 liczb, a możliwych reszt z dzielenia tylko 2013, więc istnieją wśród wybranych liczb takie dwie, które dają w tym dzieleniu tę samą resztę. Oznaczmy te liczby a_i i a_j oraz załóżmy, że $a_i < a_j$. Wtedy

$$a_j - a_i = \underbrace{2014\,2014\,2014\ldots 2014\,2014}_{\text{liczba } 2014 \text{ powtórzona } j \text{ razy}} - \underbrace{2014\,2014\,2014\ldots 2014\,2014}_{\text{liczba } 2014 \text{ powtórzona } i \text{ razy}} =$$

$$= \underbrace{2014\,2014\,2014\ldots 2014\,2014}_{\text{liczba } 2014 \text{ powtórzona } j-i \text{ razy}} \cdot 10^{4i}.$$

Ponadto $a_j - a_i = (2013p + r) - (2013q + r) = 2013(p - q)$, gdzie p, q są liczbami całkowitymi, a r jest liczbą ze zbioru $\mathcal{R}$. Zatem różnica $a_j - a_i$ dzieli się przez 2013.

Liczby $10^{4i} = 2^{4i} \cdot 5^{4i}$ oraz $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ są względnie pierwsze, więc przez 2013 dzieli się liczba

$$\underbrace{2014\,2014\,2014\ldots 2014\,2014}_{\text{liczba } 2014 \text{ powtórzona } j-i \text{ razy}}.$$

Przyjmując $n = j - i > 0$ dostajemy tezę zadania.

Zadanie 2.
Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, które dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y spełniają równanie

$$f(x)\cdot f(y) = f(xy) + x^2 + y^2.$$

Rozwiązanie
Przyjmując $x = y = 0$, dostajemy

$$f(0)\cdot f(0) = f(0),$$

a stąd $f(0) = 0$ lub $f(0) = 1$.
Jeżeli $f(0) = 0$, to dla $x = 1$ i $y = 0$ mielibyśmy równość

$$f(1)\cdot f(0) = f(0) + 1,$$

czyli $0 = 1$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że $f(0) \neq 0$. Zatem może być tylko $f(0) = 1$. Wtedy z równości

$$f(x)\cdot f(0) = f(0) + x^2$$

dostajemy $f(x) = x^2 + 1$. Bezpośrednio sprawdzamy, że funkcja ta spełnia podane w zadaniu równanie. Rzeczywiście

$$f(x)\cdot f(y) = (x^2+1)(y^2+1) = (xy)^2 + 1 + x^2 + y^2 = f(xy) + x^2 + y^2.$$

Stąd jedyną funkcją spełniającą dane równanie jest funkcja $f(x) = x^2 + 1$.

Zadanie 3.
Wyznacz wszystkie pary (p,q) liczb pierwszych spełniające równanie

$$p^2 = 12q^2 + 1.$$

Rozwiązanie
Liczba $12q^2 + 1$ jest liczbą nieparzystą, więc liczba p musi być liczbą nieparzystą. Przyjmijmy $p = 2n + 1$, gdzie n jest dodatnią liczba całkowitą. Wtedy

$$p^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 12q^2 + 1,$$

skąd

$$4n^2 + 4n = 12q^2$$
$$n^2 + n = 3q^2$$
$$n(n+1) = 3q^2.$$

Lewa strona ostatniej równości, jako iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych, jest liczbą parzystą, stąd prawa strona tej równości też jest liczbą parzystą. Zachodzi to tylko dla liczby pierwszej $q = 2$. Dane w zadaniu równanie przyjmuje więc postać

$$p^2 = 12\cdot 2^2 + 1 = 49,$$

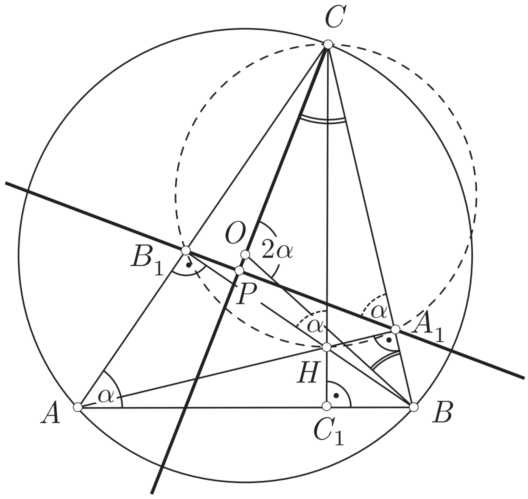
czyli $p = 7$. Zatem równanie spełnia tylko jedna para liczb pierwszych: $(p,q) = (7,2)$.

Zadanie 4.

W okrąg o środku O wpisano trójkąt ostrokątny ABC. Odcinki AA_1 i BB_1 są wysokościami tego trójkąta. Wykaż, że proste A_1B_1 i OC są prostopadłe.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia: $\sphericalangle BAC = \alpha$, punkt H — ortocentrom trójkąta ABC, a P — punkt przecięcia prostych A_1B_1 i OC (zobacz rysunek poniżej).



Jeżeki $\sphericalangle BAC = \alpha$, to $\sphericalangle BOC = 2\alpha$ jako kąt środkowy oparty na tym samym łuku co kąt wpisany BAC. Ponieważ trójkąt BOC jest równoramienny ($OB = OC$), więc

$$\sphericalangle OCB = \sphericalangle OBC = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha.$$

Trójkąt ACC_1 jest prostokątny, więc

$$\sphericalangle ACC_1 = \sphericalangle B_1CH = 90^\circ - \alpha.$$

Również trójkąt HCB_1 jest prostokątny, skąd jest

$$\sphericalangle B_1HC = 90^\circ - \sphericalangle B_1CH = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha.$$

Skoro w czworokącie wypukłym A_1CB_1H kąty przy wierzchołkach A_1 i B_1 są proste, więc na tym czworokącie można opisać okrąg. Kąty B_1HC i B_1A_1C wpisane w ten okrąg są oparte na tym samym łuku, więc

$$\sphericalangle B_1A_1C = \sphericalangle B_1HC = \alpha,$$

a zarazem $\sphericalangle PA_1C = \sphericalangle B_1A_1C$. Ostatecznie w trójkącie A_1CP mamy

$$\sphericalangle A_1PC = 180^\circ - \sphericalangle PA_1C - \sphericalangle PCA_1 = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ,$$

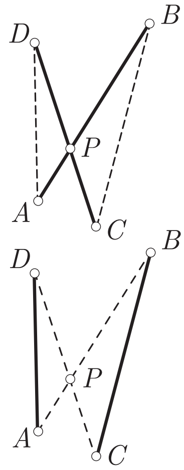
czyli proste A_1B_1 i OC są prostopadłe, co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 5.

Na płaszczyźnie wybrano dowolnie 50 różnych punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Wykaż, że istnieje 25 odcinków, których końcami są wybrane punkty oraz żadne dwa spośród tych odcinków nie przecinają się.

Rozwiązanie

Jeżeli spośród 50 punktów wybierzemy 25 par punktów, które będą końcami 25 odcinków, to wśród takich wyborów jest taki, dla którego suma długości powstałych odcinków jest najmniejsza.
Wybierzmy takie pary punktów, aby spełniony był powyższy warunek. Wykażemy, że tak wybrane odcinki są rozłączne.
Przypuśćmy, że wśród wybranych odcinków istnieją dwa przecinające się. Nazwijmy je AB i CD, a punkt ich przecięcia oznaczmy P (zobacz rysunek po prawej). Wtedy mielibyśmy



$$AD < AP + DP \quad \text{i} \quad BC < BP + CP,$$

skąd po dodaniu otrzymanych nierówności stronami

$$AD + BC < (AP + BP) + (DP + CP),$$

czyli

$$AD + BC < AB + CD.$$

Zatem, wybierając odcinki AD i BC otrzymalibyśmy sumę długości wszystkich wybranych odcinków mniejszą od tej, która miała być najmniejsza. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że wśród wybranych odcinków nie ma dwóch przecinających się. Kończy to rozwiązanie zadania.

(tsz)