XI Śląski Konkurs Matematyczny

Szkice rozwiązań zadań — zawody rejonowe 2014

Zadanie 1.
Wyznacz wszystkie pary (x,y) liczb całkowitych spełniające równanie
$$xy=2x+3y+5.$$

Rozwiązanie

Przekształcając dane równanie równoważnie, otrzymujemy
$$\begin{aligned} xy-2x-3y&=5\\ x(y-2)-3(y-2)-6&=5\\ (x-3)(y-2)&=11. \end{aligned}$$
Liczbę 11 można zapisać jako iloczyn liczb całkowitych na cztery sposoby
$$11=1\cdot 11=11\cdot 1=-1\cdot(-11)=-11\cdot(-1).$$
Zatem dane równanie jest równoważne alternatywie czterech układów równań
$$\begin{cases} x-3=1\\ y-2=11 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x-3=11\\ y-2=1, \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x-3=-1\\ y-2=-11, \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x-3=-11\\ y-2=-1. \end{cases}$$
Stąd
$$(x,y)\in\{(4,13),\ (14,3),\ (2,-9),\ (-8,1)\}.$$

Zadanie 2.
Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c spełniona jest nierówność
$$(a+b-c)^2+(b+c-a)^2+(c+a-b)^2\geqslant ab+bc+ca.$$

Rozwiązanie

Oznaczmy
$$\begin{aligned} L&=(a+b-c)^2+(b+c-a)^2+(c+a-b)^2,\\ P&=ab+bc+ca. \end{aligned}$$
Obliczając różnicę $L-P$, dostajemy
$$\begin{aligned} L-P&=(a+b-c)^2+(b+c-a)^2+(c+a-b)^2-(ab+bc+ca)=\\ &=a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ac+b^2+c^2+a^2+2bc-2ac-2ab+\\ &\qquad +c^2+a^2+b^2+2ac-2ab-2bc-ab-bc-ac=\\ &=3a^2+3b^2+3c^2-3ab-3bc-3ac=\frac{3}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\geqslant 0, \end{aligned}$$
czyli $L\geqslant P$. Stąd teza zadania.

Zadanie 3.
Znajdź wszystkie rozwiązania układu równań
$$\begin{cases} x^2+8=2(2x+y)\\ y^2+9=2(2y+z)\\ z^2+10=2(2z+x). \end{cases}$$

Rozwiązanie

Dodając stronami równania danego układu, otrzymujemy

$$x^2+y^2+z^2+27=4x+2y+4y+2z+4z+2x$$
$$(x^2-6x+9)+(y^2-6y+9)+(z^2-6z+9)=0$$
$$(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=0.$$

Suma kwadratów liczb rzeczywistych jest równa zero wtedy i tylko wtedy, gdy każda z tych liczb jest równa zero, stąd $(x,y,z)=(3,3,3)$. Zatem tylko otrzymana trójka może być rozwiązaniem tego układu równań. Jednak

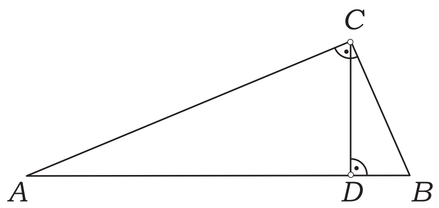
$$x^2+8=3^2+8=17 \quad \text{oraz} \quad 2(2x+y)=2(2\cdot 3+3)=18\neq 17,$$

więc nie spełnia ona pierwszego równania układu, czyli dany układ nie ma rozwiązania.

Zadanie 4.
W trójkącie prostokątnym ABC, w którym $\sphericalangle ACB=90^\circ$, poprowadzono wysokość CD. Wykaż, że

$$AC+BC<AB+CD.$$

Rozwiązanie



Zauważmy, że

(1) $\qquad AC\cdot BC=AB\cdot CD$

oraz

(2) $\qquad AC^2+BC^2=AB^2,$

ponieważ trójkąt ABC jest prostokątny.
Przekształcając równoważnie dowodzoną nierówność, otrzymujemy

$$(AC+BC)^2<(AB+CD)^2$$
$$AC^2+BC^2+2AC\cdot BC<AB^2+CD^2+2AB\cdot CD.$$

Korzystając z (1) i (2), dostajemy nierówność $CD^2>0$, która jest prawdziwa. Zatem nierówność dana w zadaniu też jest prawdziwa.

Zadanie 5.
Wykaż, że w każdej permutacji dwóch tysięcy czternastu liczb

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2013,\ 2014$$

istnieje 5 kolejnych wyrazów, których suma jest nie mniejsza niż 5035.

Rozwiązanie

Biorąc dowolną permutację $(n_1,n_2,n_3,\ldots,n_{2013},n_{2014})$ tych liczb, możemy zauważyć, że

$$(n_1+n_2+\cdots+n_5)+(n_6+n_7+\cdots+n_{10})+\cdots+(n_{2006}+n_{2007}+\cdots+n_{2010})+$$
$$+(n_{2011}+n_{2012}+n_{2013}+n_{2014})=1+2+3+\cdots+2013+2014=\frac{2014\cdot 2015}{2}=2029105.$$

Gdyby w każdym nawiasie suma była mniejsza od 5035, to wtedy suma wszystkich liczb byłaby mniejsza niż $403\cdot 5035=2029105$ co jest niemożliwe. Zatem w co najmniej jednym z nawiasów suma elementów jest nie mniejsza niż 5035. Gdyby tak było w nawiasie ostatnim, wtedy suma $n_{2010}+n_{2011}+n_{2012}+n_{2013}+n_{2014}$ będzie na pewno większa od 5035. Kończy to rozwiązanie zadania.

(*tsz*)