XXI Śląski Konkurs Matematyczny
Szkice rozwiązań zadań finałowych

Zadanie 1.

Na skwerze zakwitły trzy krzewy w kolorach: białym, żółtym i czerwonym. Liczba wszystkich kwiatów była dwa razy większa od liczby kwiatów białych. Po kilku dniach z krzewów opadło sześć kwiatów i wtedy suma wszystkich kwiatów na krzewach była dwa razy większa od liczby kwiatów żółtych. Po kolejnych kilku dniach z krzewów opadło jeszcze osiem kwiatów i wtedy na krzewach było razem dwa razy więcej kwiatów niż kwiatów czerwonych, a liczby kwiatów białych, żółtych i czerwonych, w tej kolejności, były kolejnymi liczbami naturalnymi. Ile kwiatów poszczególnych kolorów było na tych krzewach w pierwszym dniu?

Rozwiązanie

Oznaczmy: b_0, z_0 i c_0 liczby kwiatów odpowiednio: białych, żółtych i czerwonych na początku. Zatem

(1) $$b_0+z_0+c_0=2b_0, \quad \text{czyli} \quad z_0+c_0=b_0.$$

Jeżeli po pierwszym opadnięciu kwiatów, liczby kwiatów: białych, żółtych i czerwonych oznaczymy odpowiednio: b_1, z_1 i c_1, to uwzględniając też (1), mamy

(2) $$2b_0-6=b_1+z_1+c_1=2z_1, \quad \text{skąd} \quad z_1=b_0-3.$$

Gdy po drugim opadnięciu kwiatów, liczby kwiatów: białych, żółtych i czerwonych oznaczymy odpowiednio: b_2, z_2 i c_2, to — uwzględniając ponownie (1) — mamy

(3) $$2b_0-14=b_2+z_2+c_2=2c_2 \quad \text{i} \quad \text{stąd} \quad c_2=b_0-7.$$

Ponieważ też $z_2=b_2+1$ i $c_2=b_2+2$, więc na podstawie (3) dostajemy

$$b_2+(b_2+1)+(b_2+2)=2(b_2+2),$$

skąd $b_2=1$ oraz $z_2=2$ i $c_2=3$. Z równości $2b_0-14=2c_2=6$ otrzymujemy $b_0=10$, a stąd — na podstawie (1) — również $z_0+c_0=10$. Ponieważ $z_1=b_0-3=10-3=7$, więc $z_0\geqslant 7$. Analogicznie z zależności $c_2=b_0-7=10-7=3$ dostajemy, że $c_0\geqslant 3$.
Gdyby było $z_0>7$ lub $c_0>3$, to mielibyśmy $z_0+c_0>10$, a to jest sprzeczne z warunkiem $z_0+c_0=10$. Zatem $z_0=7$ i $c_0=3$.
Możemy sprawdzić bezpośrednio, że trójki: $(b_0,z_0,c_0)=(10,7,3)$, $(b_1,z_1.c_1)=(4,7,3)$, $(b_2,z_2,c_2)=(1,2,3)$ spełniają warunki zadania.

Odp.: Na początku na tych krzewach było 10 kwiatów białych oraz 7 żółtych i 3 czerwone.

Zadanie 2.

Dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniają równość

$$\sqrt{abc}=\frac{1}{2}(a+b+c).$$

Wykaż, że zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{3}{2}.$$

Rozwiązanie

Sposób 1.

Korzystając z zależności między średnią arytmetyczną a geometryczną dla dwóch liczb dodatnich, otrzymujemy

$$\sqrt{abc}=\frac{(a+b)+c}{2}\geqslant\sqrt{(a+b)c},$$

a stąd

$$ab \geqslant a+b, \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \leqslant 1. \tag{1}$$

Analogicznie dostajemy

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c} \leqslant 1 \quad \text{i} \quad \frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqslant 1. \tag{2}$$

Dodając stronami nierówności (1) i (2), dostajemy

$$\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c} \leqslant 3,$$

skąd uzyskujemy, że

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Sposób 2.

Sposób ten jest nieznaczną modyfikacją sposobu 1.

Z założenia i zależności między średnią geometryczną a arytmetyczną dla dwóch liczb dodatnich otrzymujemy

$$\frac{1}{2}(a+b+c)=\sqrt{a(bc)} \leqslant \frac{1}{2}(a+bc).$$

Stąd

$$b+c \leqslant bc, \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqslant 1.$$

Analogicznie dostajemy

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \leqslant 1 \quad \text{i} \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{c} \leqslant 1.$$

Zatem

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)\right) \leqslant \frac{3}{2}.$$

Sposób 3.

Zauważmy, że warunek z założenia możemy zapisać równoważnie w postaci

$$4abc=(a+b+c)^2, \quad \text{czyli} \quad 4abc=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca. \tag{1}$$

Ponieważ

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{4(ab+bc+ca)}{4abc},$$

więc na podstawie (1) otrzymujemy

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{4(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}. \tag{2}$$

Korzystając teraz ze znanej nierówności $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$, dostajemy

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \geqslant 3(ab+bc+ca),$$

skąd i na podstawie (2) mamy

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{4(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca} \leqslant \frac{4(ab+bc+ca)}{3(ab+bc+ca)}=\frac{4}{3}<\frac{3}{2}.$$

Sposób 4.

Z założenia $\sqrt{abc}=\frac{1}{2}(a+b+c)$ otrzymujemy

$$abc=\frac{1}{4}(a+b+c)^2=\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}{4}. \tag{1}$$

Aby wykazać tezę wystarczy udowodnić, że

$$\frac{ab+bc+ca}{abc} \leqslant \frac{3}{2}$$

albo równoważnie $3abc \geqslant 2ab+2bc+2ca$. Wykorzystując (1), dostajemy

$$\frac{3a^2+3b^2+3c^2+6ab+6bc+6ca}{4} \geqslant 2ab+2bc+2ca.$$

Przekształcając dalej równoważnie, otrzymujemy

$$3a^2+3b^2+3c^2+6ab+6bc+6ca \geqslant 8ab+8bc+8ca,$$

$$a^2+b^2+c^2+(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2) \geqslant 0,$$

$$a^2+b^2+c^2+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 0.$$

Ostatnia nierówność jest zawsze prawdziwa, więc teza zadania jest spełniona. Kończy to rozwiązanie zadania.

Zadanie 3.

Liczba n jest sumą kwadratów trzech liczb całkowitych. Wykaż, że liczbę $3n$ można przedstawić jako sumę kwadratów czterech liczb całkowitych.

Rozwiązanie

Niech $n=a^2+b^2+c^2$ dla pewnych dodatnich liczb całkowitych: a, b, c. Wtedy

$$\begin{aligned}3n&=3a^2+3b^2+3c^2=a^2+b^2+c^2+2a^2+2b^2+2c^2=\\&=(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac)+(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(a^2-2ac+c^2)=\\&=(a+b+c)^2+(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2,\end{aligned}$$

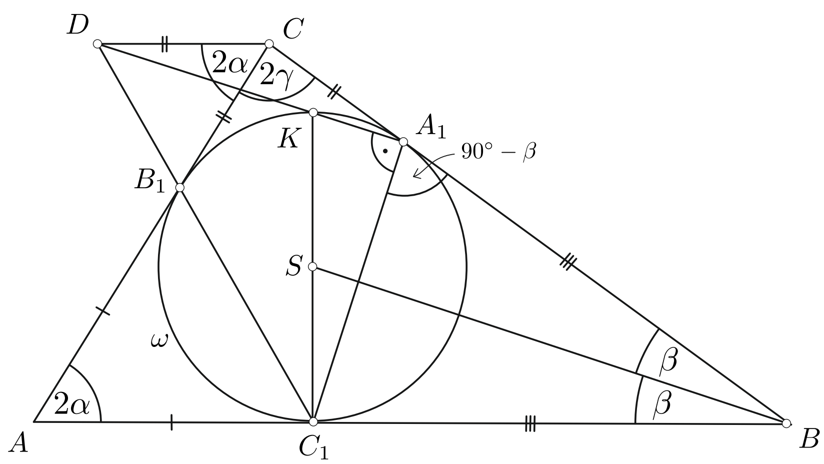
a dla liczb całkowitych: a, b, c liczby: $a+b+c$, $a-b$, $b-c$, $a-c$ też są całkowite. Kończy to rozwiązanie zadania.

Zadanie 4.

W trójkąt ABC wpisano okrąg ω, który jest styczny do boków: AB, BC, AC w punktach odpowiednio: C_1, A_1, B_1. Punkt K jest drugim końcem średnicy okręgu ω przechodzącej przez punkt C_1. Na prostej B_1C_1 wybrano taki punkt D, że odcinki AB i CD są równoległe. Wykaż, że punkty: A_1, K, D leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie

Niech D będzie punktem spełniającym warunki zadania, czyli $CD \parallel AB$.



Z twierdzenia o odcinkach stycznych do okręgu mamy

$$AC_1=AB_1 \quad \text{i} \quad CB_1=CA_1.$$

Ponieważ, zgodnie z założeniem, $CD \parallel AB$, zatem trójkąty AC_1B_1 i CDB_1 są podobne. Skoro też $AC_1 = AB_1$, więc również $CD = CB_1 = CA_1$, stąd trójkąt CDA_1 jest równoramienny, czyli
$$\sphericalangle CDA_1 = \sphericalangle CA_1D.$$
Przyjmijmy, że kąty trójkąta ABC są 2α, 2β, 2γ (zobacz rysunek), zatem $2\alpha+2\beta+2\gamma=180°$.

Z równoległości odcinków CD i AB wynika, że $\sphericalangle DCB_1 = \sphericalangle BAC = 2\alpha$. Ponieważ
$$\sphericalangle CDA_1 + \sphericalangle CA_1D + 2\alpha + 2\gamma = 2\sphericalangle CDA_1 + 2\alpha + 2\gamma = 180°,$$
więc $\sphericalangle CDA_1 = \beta$.

Wiemy, że środek S okręgu wpisanego w trójkąt ABC jest punktem przecięcia się dwusiecznych jego kątów wewnętrznych, więc
$$\sphericalangle ABS = \sphericalangle CBS = \beta,$$
stąd i z równoległości odcinków CD i AB dostajemy, że odcinki DA_1 i BS są równoległe.

Weźmy teraz pod uwagę punkty: C, A_1, K. Skoro C_1K jest średnicą okręgu ω, więc $\sphericalangle C_1A_1K = 90°$. Trójkąt A_1BC_1 jest równoramienny ($BA_1 = BC_1$), stąd $\sphericalangle BA_1C_1 = 90° - \beta$. Ponieważ
$$\sphericalangle BA_1C_1 + \sphericalangle C_1A_1K + \sphericalangle KA_1C = 180°,$$
$$(90° - \beta) + 90° + \sphericalangle KA_1C = 180°,$$
więc $\sphericalangle CA_1K = \beta = \sphericalangle CBS$. Oznacza to, że odcinki A_1K i BS są równoległe, a stąd równoległe są też odcinki DA_1 i A_1K. Zatem punkt K leży na odcinku DA_1, czyli punkty: A_1, K, D leżą na jednej prostej.

Zadanie 5.

Na okręgu umieszczono 2024 lampki, każda z przełącznikiem, który zmienia stan (zapalona/zgaszona) dwóch sąsiadujących z nim lampek, nie zmieniając stanu lampki z przełącznikiem. Początkowo dwie sąsiednie lampki są zapalone, a pozostałe są zgaszone. Rozstrzygnij, czy przy użyciu dostępnych przełączników można doprowadzić do sytuacji, że wszystkie lampki będą zapalone.

Rozwiązanie

Ponumerujmy kolejno lampki liczbami: 1, 2, 3, …, 2023, 2024. Dwie sąsiednie zapalone lampki mają więc numery różnej parzystości. Zauważmy, że każde użycie przełącznika zmienia stan pewnych dwóch lampek o numerach tej samej parzystości. Użycie przełącznika nie zmienia więc parzystości liczby zapalonych lampek o numerach parzystych. Aby wszystkie lampki była zapalone, musi być zapalonych 1012 lampek o numerach parzystych. Skoro na początku zapalona była jedna lampka o numerze parzystym, to po każdym użyciu przełącznika liczba zapalonych lampek o numerach parzystych będzie nieparzysta, więc nie może być równa 1012. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że nie można doprowadzić do sytuacji, aby wszystkie lampki były zapalone.

Analogicznie jest dla lampek o numerach nieparzystych.

(*tsz*)