XII Śląski Konkurs Matematyczny
Szkice rozwiązań zadań — zawody finałowe 2015

Zadanie 1.

Dane są takie liczby rzeczywiste x, y i z, że spełnione są równości

$$x+y=z+2015 \quad \text{i} \quad x^2+y^2=z^2+2015^2.$$

Wykaż, że liczby x, y i z spełniają też równość

$$x^3+y^3=z^3+2015^3.$$

Rozwiązanie

Rozwiążemy zadanie ogólniejsze, w którym liczbę 2015 zastąpimy dowolną liczbą rzeczywistą. Przyjmijmy, że dane są takie liczby rzeczywiste x, y, z i a, które spełniają równości

(1) $$x+y=z+a$$

oraz

(2) $$x^2+y^2=z^2+a^2.$$

Podnosząc obustronnie do kwadratu równość (1), dostajemy

$$x^2+y^2+2xy=z^2+a^2+2za,$$

skąd, po wykorzystaniu równości (2), otrzymamy $xy=za$. Zauważmy teraz, że

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)=(z+a)(z^2+a^2-za)=z^3+a^3,$$

a to mieliśmy wykazać.

Zadanie 2.

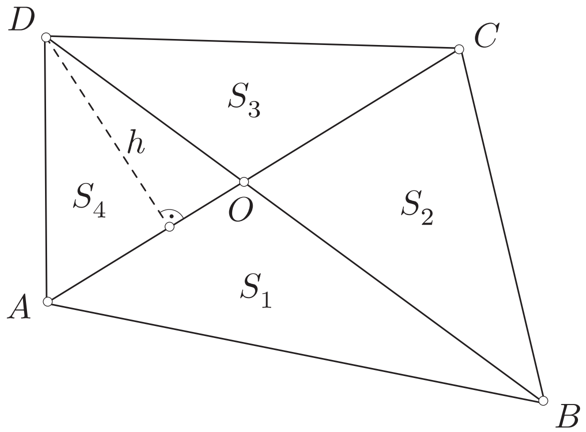
Przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie O. Pola trójkątów ABO, BCO, CDO i DAO są równe odpowiednio S_1, S_2, S_3 i S_4. Wykaż, że jeśli

$$\frac{S_1+S_3}{2}=\sqrt{S_2S_4},$$

to czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

Rozwiązanie

Poprowadźmy z wierzchołka D wysokość h trójkątów AOD i COD (zobacz rysunek).



Pola tych trójkątów są równe odpowiednio

$$S_4=\frac{1}{2}\cdot AO\cdot h \quad \text{oraz} \quad S_3=\frac{1}{2}\cdot CO\cdot h.$$

Stąd

$$\frac{S_4}{S_3}=\frac{\frac{1}{2}\cdot AO\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot CO\cdot h}=\frac{AO}{CO}.$$

Analogicznie otrzymujemy

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{AO}{CO},$$

skąd $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{S_4}{S_3}$, albo równoważnie $S_1S_3=S_2S_4$. Daną w zadaniu równość możemy więc zapisać

$$\frac{S_1+S_3}{2}=\sqrt{S_1S_3},$$

a ta po równoważnych przekształceniach przyjmuje postać

$$\left(\sqrt{S_1}-\sqrt{S_3}\right)^2=0.$$

Z otrzymanej równości dostajemy $S_1=S_3$. Skoro tak, to

$$[ABC]=[ABO]+[BCO]=S_1+S_2=S_3+S_2=[BCO]+[CDO]=[BCD].$$

Trójkąty ABC i BCD mają wspólną podstawę BC oraz równe pola, stąd ich wysokości poprowadzone do podstawy BC są równe. Oznacza to, że punkty A i D są jednakowo oddalone od prostej BC, czyli proste AD i BC są równoległe. Kończy to rozwiązanie zadanie.

Zadanie 3. Rozstrzygnij, czy istnieją liczby całkowite a, b, c, spełniające równanie

$$a^4+b^4+444=c^4.$$

Rozwiązanie

W rozwiązaniu skorzystamy z następującego lematu:
Reszta z dzielenia czwartej potęgi liczby całkowitej a przez 16 jest równa 0 lub 1.
Istotnie, gdy liczba a jest parzysta, czyli $a=2k$ dla pewnej liczby całkowitej k, to $a^4=16k^4$, czyli a^4 przy dzieleniu przez 16 daje resztę 0.
Jeśli natomiast liczba a jest nieparzysta, czyli $a=2k+1$ dla pewnej liczby całkowitej k, to

$$a^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1.$$

Dla dowolnej liczby całkowitej k liczba $k(k+1)$, jako iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych, jest liczbą parzystą. Stąd

$$a^2=4k(k+1)+1=4\cdot 2p+1=8p+1$$

dla pewnej liczby całkowitej p. Zatem

$$a^4=(a^2)^2=(8p+1)^2=64p^2+16p+1=16(4p^2+p)+1,$$

więc w tym przypadku liczba a^4 przy dzieleniu przez 16 daje resztę 1. Tym samym dowód lematu został zakończony.
Przejdźmy do rozwiązania zadania. Na podstawie podanego lematu liczby a^4 i b^4 przy dzieleniu przez 16 mogą dać resztę 0 lub 1. Liczba 444 przy dzieleniu przez 16 daje resztę 12. Zatem, w zależności od parzystości liczb a i b, wyrażenie a^4+b^4+444 przy dzieleniu przez 16 daje jedną z reszt: 12, 13 lub 14. Natomiast c^4 przy dzieleniu przez 16 może dać jedną z reszt: 0 lub 1. Stąd nie istnieją liczby całkowite a, b, c, spełniające podaną w zadaniu równość.

Uwaga. W rozwiązaniu skorzystaliśmy z lematu o reszcie z dzielenia czwartej potęgi liczby całkowitej przez 16. Można wykazać, że przy dzieleniu czwartej potęgi liczby całkowitej przez 8 reszty mogą również być równe tylko 0 lub 1.

Zadanie 4.

Liczby x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 są nieujemne, a ich suma jest równa 1. Wykaż, że spełniona jest nierówność

$$x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_5+x_4x_5x_6+x_5x_6x_1+x_6x_1x_2\leqslant\frac{1}{27}.$$

Rozwiązanie

Rozpatrzmy wyrażenie $(x_1+x_4)(x_2+x_5)(x_3+x_6)$. Wymnażając nawiasy, otrzymujemy

$$\begin{aligned}&(x_1+x_4)(x_2+x_5)(x_3+x_6)=\\&\qquad=x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_5+x_4x_5x_6+x_5x_6x_1+x_6x_1x_2+x_1x_3x_5+x_2x_4x_6\end{aligned}$$

Wszystkie liczby x_i występujące w tym wyrażeniu są nieujemne, więc

$$x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_5+x_4x_5x_6+x_5x_6x_1+x_6x_1x_2 \leqslant (x_1+x_4)(x_2+x_5)(x_3+x_6).$$

Na podstawie nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną dla trzech liczb nieujemnych dostajemy

$$(x_1+x_4)(x_2+x_5)(x_3+x_6) \leqslant \left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

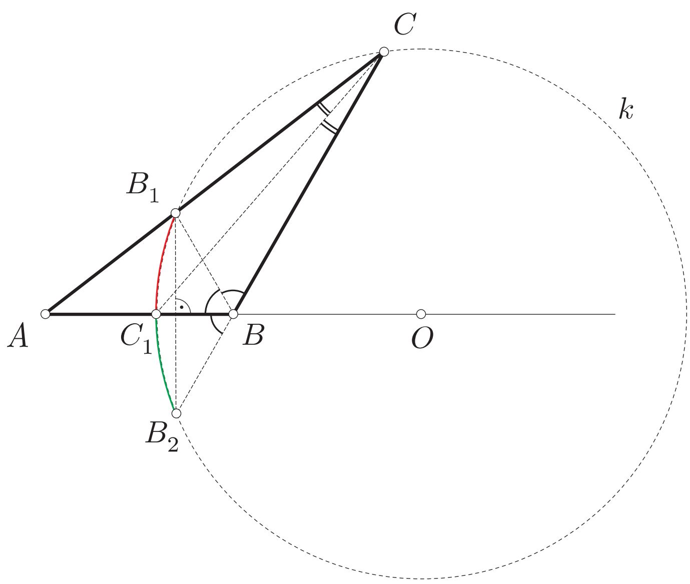
a stąd wynika nierówność, którą mieliśmy udowodnić.

Zadanie 5.

Dwusieczne kątów wewnętrznych przy wierzchołkach B i C trójkąta ABC przecinają boki AC i AB w punktach odpowiednio B_1 i C_1. Środek okręgu opisanego na trójkącie C_1CB_1 leży na prostej AB. Wyznacz miarę kąta ABC.

Rozwiązanie

Okrąg opisany na trójkącie C_1CB_1 oznaczmy k (zobacz rysunek).



Niech prosta BC przecina okrąg k w punkcie $B_2 \neq C$. Ponieważ

$$\sphericalangle B_1CC_1 = \sphericalangle BCC_1,$$

więc odpowiadające tym kątom wpisanym łuki B_1C_1 i B_2C_1 okręgu k są równe. Punkty B_1, C_1, B_2 leżą na okręgu k, którego środek leży na prostej AB. Stąd punkty B_1 i B_2 są położone symetrycznie względem prostej AB, a zatem trójkąty BB_1C_1 i BB_2C_1 są przystające, czyli

$$\sphericalangle B_2BC_1 = \sphericalangle B_1BC_1.$$

Ponieważ

$$\sphericalangle B_1BC_1 = \sphericalangle B_1BC,$$

więc

$$\sphericalangle B_2BC_1 = \sphericalangle B_1BC_1 = \sphericalangle B_1BC.$$

Suma miar tych kątów wynosi $180°$, stąd każdy z nich ma miarę $60°$, a zatem

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle C_1BB_1 + \sphericalangle CBB_1 = 120°.$$

(*tsz*)